

$$x+1 = x' \quad (e)$$

$$\underline{x+1} = (x \wedge 1') \vee (x' \wedge 1) = (x \wedge 0) \vee (x' \wedge 1) = 0 \vee x' = x'$$

ملاحظة:

$$x+x' = 1$$

$$x+x' = x + \underline{x+1} = 0 + 1 = 1$$

بناء الحلقة:

بداهة:

كل شبكة بول تكون حلقة تبديلية واحدة من أجل العنصرين:

$x+y$ المعرفة سابقاً

$$x \wedge y = x \wedge y$$

نضع ذلك بيننا في هذه الحلقة، لنرى كيف يكون جداول الحقيقة من أجل أي x

$$x^2 = x$$

البرهان:

لتكن x شبكة بول حسب ما رأينا سابقاً جداول (x, x') تكون زمر تبديلية
لشبكة البزنج بالترتيب التالي $x \wedge y, x \vee y$ نكتب الحقيقة $x \vee y$ هذه العملية
تكون تبديلية فجميعاً الحقيقة الخاصة بالجدول ولا أعرف جاري كذا، لنرى تعاريف
من الجمع

$$(x+y)z = [(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)] \wedge z = [(x \wedge y') \wedge z] \vee [(x' \wedge y) \wedge z]$$

$$x \wedge z + y \wedge z = (x \wedge z) + (y \wedge z) = [(x \wedge z) \wedge (y \wedge z)] \vee [(x \wedge z)' \wedge (y \wedge z)]$$

$$= [(x \wedge z) \wedge (y' \vee y)] \vee [(x' \vee x) \wedge (y \wedge z)]$$

$$= (x \wedge z \wedge y') \vee (x \wedge z \wedge y) \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (\underline{z \wedge y \wedge z})$$

$$= (x \wedge z \wedge y') \vee (x \wedge z \wedge y)$$

نضع نتائجنا $(x+y)z = xz + yz$ وتبالي جداول (x, x') تبديلية واحدة

المقدمات البوليانية

تعريف:

نسمي الحلقة الراسية حيث العنصر فيه محايداً (أي $x^2 = x$) بحلقة بول

نقائلي.

كل عنصر يكون نظير نفسه

$$(x+x)^0 = x+x \Rightarrow (x+x)(x+x) = x+x$$

$$\Rightarrow (x+x)x + (x+x)x = x+x$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + x^2 + x = x+x$$

$$\Rightarrow x+x+x+x = x+x \Rightarrow x+x=0$$

المتباينة

الترتيب تبديلي

$$(x+y)^2 = x+y \Rightarrow (x+y)(x+y) = x+y$$

$$\Rightarrow (x+y)x + (x+y)y = x+y$$

$$\Rightarrow x^2 + yx + xy + y^2 = x+y$$

$$\Rightarrow x + yx + xy + y = x+y$$

$$\Rightarrow x+y + yx+xy = x+y \Rightarrow yx+xy=0 \Rightarrow yx=xy$$

بناء شبكة بول:

جدولته

الحلقة بوليانية تكون شبكة حيث أن العنصرين الأولين

$$x \wedge y = x \cdot y$$

$$x \vee y = x + y + xy$$

البرهان

الملاحظة 1: تبديلية الجمعية وقسم الحاصلية الجامعة

الملاحظة 2

$$y+x = y+x+xy = y+x+xy = x+y$$

تبديلية:

ثاني

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee z &= (x \vee y) + z + (x \vee y)z \\&= x + y + xy + z + (x + y + xy)z \\&= x + y + xy + z + xz + yz + xyz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \vee (y \vee z) &= x + (y \vee z) + x(y \vee z) = x + y + z + yz + x(y + z + yz) \\&= x + y + yz + xy + xz + xyz\end{aligned}$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

ثالث

المبدأ

$$x \vee x = x + x + x^2 = \underline{x + x} + x = 0 + x = x$$

رابع

$$\begin{aligned}x \wedge (x \vee y) &= x(x \vee y) = x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2y = x + \underline{xy} + \underline{x^2y} \\&= x + 0 = x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \vee (x \wedge y) &= x + (x \wedge y) + x(x \wedge y) = x + xy + x^2y = x + \underline{xy} + \underline{x^2y} \\&= x + 0 = x\end{aligned}$$

خامس

$$\begin{aligned}x \wedge (y \vee z) &= x(y + z + yz) = xy + xz + xyz \\(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= xy \vee xz = xy + xz + x^2yz = xy + xz + xyz\end{aligned}$$

سادس

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

الحقبة

$$\begin{aligned}x \wedge x' &= x \cdot x' = x(x+1) = x^2 + x = x + x = 0 \quad x' = x+1 \quad 0 \text{ نفرضه} \\x \vee x' &= x + x' + xx' = x + (x+1) + x(x+1) \\&= x + x + 1 + x^2 + x \\&= \underline{x + x} + 1 + \underline{x + x} = 0 + 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

والمفهوم الآخر هو المفهوم الآخر

$$x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \leq x$$

$$x \wedge 1 = x \cdot 1 = x \Rightarrow x \leq 1$$

وهذه تسمى أن الحلقة البوليانية هي شبكة بول

الشبكة والخاصة بالهراقة

لكن كل شبكة بول لفرقة بالحلقة البوليانية والتي سنميزها بـ $R(E)$ وذلك بتعريف العنصرين

$$x + y = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$$

$$x \cdot y = x \wedge y$$

ليكن B حلقة بوليانية لفرقة بالشبكة البوليانية والتي سنميزها بـ $L(B)$ وذلك بتعريف

$$x \wedge y = x \cdot y$$

$$x \vee y = x + y + x \cdot y$$

مبرهنة:

$$L(R(E)) = E$$

البرهان:

لنفرز \hat{A}, \hat{V} للعنصرين $L(R(E))$

$$x \wedge y = x \cdot y = x \wedge y$$

$$x \vee y = x + y + x \cdot y = x \vee y$$

وبالتالي نستنتج أن عملية الترتيب هي نفسها في $L(R(E))$ وبالتالي فهي تساوي الشبكة

مبرهنة:

$$R(L(B)) = B$$

البرهان:

لنفرز x, y للعنصرين $R(L(B))$

$$x \times y = x \wedge y = x \cdot y$$

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = [x(y+1)] \vee [(x+1)y]$$

$$= (xy + x) \vee (xy + y)$$

$$= (xy + x) + (xy + y) - (xy + x)(xy + y)$$

$$= xy + x + xy + y + x^2 y^2 + xy^2 + x^2 y + xy$$

$$= \underbrace{xy + xy}_{=0} + \underbrace{xy + xy}_{=0} + \underbrace{xy + xy}_{=0} = x + y$$

نتيجة:

يمكن أن نعرف في الجبر E على الشكل التالي:

- بناء جبر بول $(E, \cdot, \vee, \wedge, 0, 1, ')$

- بناء حلقة بول $(E, +, \cdot)$

عندما نتول جبر بول نعلم الجبر المعرف على البنائين السابقين

$(E, \cdot, \vee, \wedge, 0, 1, ')$

حيث أنه يمكن الانتقال من أحد البنائين إلى الآخر من العلاقات

$$\left\{ \begin{array}{l} x \wedge y = x \cdot y \\ x \vee y = x + y + x \cdot y \\ x' = x + 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \cdot y = x \wedge y \\ x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\ = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') \end{array} \right.$$

ملاحظات:

يعرف أنه $(E, +, \cdot, \vee, \wedge, 0, 1, ')$ جبر بول

(1) علاقة الترتيب $y \leq x$ يمكن التعبير عنها بالشكل التالي والمركبات

• $x \leq y \iff x \cdot y = x$ (ويمكن استخدام $x \wedge y = x$)

• $x \leq y \iff x \vee y = y$

• $x' \vee y = 1$ وذلك لأن

$$x' \vee y = x' + y + x' \cdot y = (x+1) + y + (x+1) \cdot y$$

$$= \underbrace{x+1}_{=0} + y + \underbrace{xy + y}_{=0}$$

$$= x \vee y + y + 1$$

$$= \underbrace{y + y}_{=0} + 1 = 1$$

نفرض أن $x, \frac{n}{x}$ أوليين فيما بينهما عندئذ يوفقا سم صغرنا أولي بينهما مثل p
 ولدينا $x = pa$ $\frac{n}{x} = pb$ ومنه $n = p^2 ab$ $n = p^2 b \cdot a$
 وبالتالي صغرنا المشترك مع مربع عدد أولي

المسألة:
 إذا كانت n تقبل القسمة على مربع عدد أولي p يكون $n = kp^2$ عندئذ يكون $x = p$
 $\frac{n}{x} = kp$ لا يكونا أوليين فيما بينهما وبالتالي تتبع المبرنة التالية

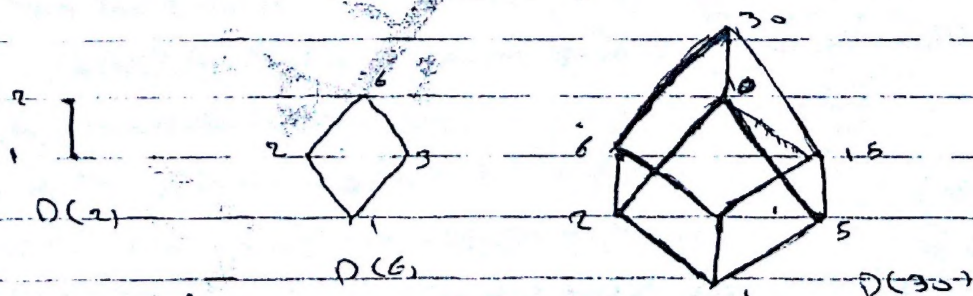
مبرنة:
 المسألة $D(n)$ المرتبة بطلقة تقسم تكون صحيحة بول إذا و فقط إذا كانت n تقبل
 القسمة على مربع عدد أولي وهذا يعني أن $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots$ أما إذا أولية
 في هذه الحالة تكون $D(n)$ غير بول مع العكس

$$xy = \gcd(x, y) \cdot \text{lcm}(x, y) \quad x \vee y = \text{lcm}(x, y) \quad x' = \frac{n}{x}$$

$$x + y = \gcd(\text{lcm}(x, y), \text{lcm}(x', y))$$

المثال:

نفرض أن $D(2)$ و $D(6)$ و $D(30)$ دالتين أوليتين مع U



لنحسب مثلا $D(30)$

$$5 \vee 2 = \gcd(\text{lcm}(5, 2), \text{lcm}(\frac{30}{5}, \frac{30}{2}))$$

$$= \gcd(10, 30) = 10$$

$$6 \vee 2 = \gcd(6, 2) = 2$$

حلقة الجوارح المستمرة والمغلقة بآ c واحد cc حلقة في فضاء طوبولوجي ؛
 في فضاء طوبولوجي X نذكر cc كحلقة جزئية من X والتي تكون بنفس الوقت
 مستمرة ومغلقة. نذكر فضاء طوبولوجي يحتوي على التوكل مجموعتين مفتوحتين ومغلقتين بنفس
 الوقت X ، وإذا كانت الفضاءات cc تكونا الدائرتان

ليكن X مركبة الجوارح المستمرة والمغلقة بآ c واحد من X فإن X تكون شبكة
 جزئية من (E) ، لأنه إذا كانت $A, B \in X$ فإن $A \cap B \neq \emptyset$ و $A \cup B \neq \emptyset$
 يتحقق في X كما أن X شبكة تعزيبية على الفضاء الذي X والمفرد الآخر \emptyset بالإنسان
 لذلك فإن A يتحقق إلى X ومنه بناء على X تكون X مجموعة بول من أجل العمليات
 المعروفة. وسنذكر أهمية X في الفصل الثاني المتعلقة بالنسبة X كمكان بيدي X مع هذا
 الدخلاء الطوبولوجية ارضية يكون $X = Y$

الحلقات البوليانية الجزئية :

تعريف :

ليكن A مجموعة بول عنصرية نوع حلقة بول الجزئية أو مجموعة بول الجزئية من A كل حلقة جزئية
 واحدة في A . أي أنه حلقة بول الجزئية B الحادية الفضاء الجدي 1 وحلقة بالنسبة
 x, y, z ، $x + y, x \cdot y$

ومنه يتبع $A \cap B$ حلقة بالنسبة للعنصرين x, y ، $x + y$ ، $x \cdot y$ ، 0 أي $A \cap B$ تكون
 مجموعة بول من أجل البناء المعول

وحسب الملاحظات ٣ العمليات في الفقرة السابقة يمكن أن نستخرج المبرهنات التالية :

مبرهنات :

المقابلة التالية متكافئة :

- B حلقة بوليانية جزئية من A
- B مجموعة جزئية غير طالية من A وحلقة بالنسبة للعنصرين x, y ، $x + y$
- B مجموعة جزئية غير طالية من A وحلقة بالنسبة للعنصرين x, y ، $x \cdot y$

ملاحظات :

الحلقة البوليانية الجزئية B من A والزودك بالترتيب المعطاة تكون شبكة جزئية من A
 لكن ليس كل شبكة جزئية من A تكون بالضرورة حلقة بوليانية جزئية

أصله:

① لكن في مجموعة غير منتزعة A أسرة المجموعات المنتزعة من C تكون شبكة جزئية من $\mathcal{P}(E)$ وذلك است حلقة بولائية جزئية (رغم $A \neq E$) حلقة بولائية) وذلك لا تعني المنهج الحايي في هذا الترتيب الموحد تكون هذه الشبكة تنزعية، وذلك ليست مقيدة (لا تعني المنهج الأكبر)

② $D(6)$ تكون شبكة جزئية من $D(30)$ وذلك ليست شبكة بولائية جزئية من $D(30)$ ذلك لأن لا تعني المنهج الحايي $D(6)$ فلا يخرج أن الترتيب المعلوم $D(6)$ تكون شبكة بول

بالمقابل $\{1, 2, 15, 30\}$ المرتبة ببلقة يتم حلقة بولائية جزئية من $D(30)$ (لذلك كبرية المبادي وذلك منلة بالنسبة لـ $1, 5, 6, 10$)

ملاحظة:

أي حلقة بولائية A قوية مع اشتد جميع بولائين جزئين A و $A \cap B$

③ تقاطع أي أسرة $\{B_i\}$ من العلاقات البولائية الجزئية من A يكون حلقة بولائية جزئية من A

أصله:

① الأسرة $\mathcal{C}(E)$ من المجموعات المنتزعة أو ذات المقامات المنتزعة من المجموعة C تكون حلقة بولائية جزئية من $\mathcal{P}(E)$

② الأسرة \mathcal{C} من المجموعات المقنونة والمغلقة بآ C واحد C وهذا $\mathcal{P}(X)$ تكون حلقة بولائية جزئية من $\mathcal{P}(X)$

سبب الأسرة \mathcal{C} من المجموعات المقنونة في X تكون شبكة جزئية من $\mathcal{P}(X)$ وذلك الحالة العامة لا تكون شبكة بولائية جزئية من $\mathcal{P}(X)$ وذلك لأن ليست منلة بالنسبة للمعنى (أي أنه ليست مقيدة)

انتهت المحاضرة